Appendix C　のこぎり波の第 3 フーリエ部分和について

「**のこぎり波の第 3 フーリエ部分和**」について説明する。そのためにまず、フーリエ級数とフーリエ部分和の一般形について述べ、次に、のこぎり波の定義とそのフーリエ級数ならびにフーリエ部分和について述べる。さらに、のこぎり波に関連して、矩形波ならびに三角波それぞれについて、その定義とそのフーリエ級数ならびにフーリエ部分和について述べる。

C.1　フーリエ級数とフーリエ部分和

$0 < T < \infty$ なる定数 $T \in \mathbb{R}$ があって、関数 $f(t)$ が、T を基本周期とする周期関数である、すなわち $^\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して $f(t + mT) = f(t)$ をみたすとする。このとき $f(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt \tag{3}$$

式 (1) の右辺をフーリエ級数という。$0 \leqq n \in \mathbb{Z}$ に対して式 (2) で与えられる a_nと、$1 \leqq n \in \mathbb{Z}$ に対して式 (3) で与えられる b_nをフーリエ係数という。式 (1) の右辺すなわちフーリエ級数に対して、$1 \leqq N < \infty$ なる定数 $N \in \mathbb{N}$ までの和すなわち $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right)$ を第 N フーリエ部分和という。

なお、$\cos \frac{2\pi nt}{T}$ は、周期 T の周期関数である（ただし、$1 \leqq n \in \mathbb{Z}$）。

$$\because {}^\forall m \in \mathbb{Z} \text{ に対して } \cos \frac{2\pi n(t+mT)}{T} = \cos \frac{2\pi nt + 2\pi nmT}{T} = \cos \left(\frac{2\pi nt}{T} + 2\pi nm \right)$$
$$= \cos \frac{2\pi nt}{T} \cos 2\pi nm - \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin 2\pi nm$$
$$= \left(\cos \frac{2\pi nt}{T} \right) \cdot 1 - \left(\sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \cdot 0$$
$$= \cos \frac{2\pi nt}{T}$$

■

また、$\sin \frac{2\pi nt}{T}$ も、周期 T の周期関数である（ただし、$1 \leqq n \in \mathbb{Z}$）。

$$\because {}^\forall m \in \mathbb{Z} \text{ に対して } \sin \frac{2\pi n(t+mT)}{T} = \sin \frac{2\pi nt + 2\pi nmT}{T} = \sin \left(\frac{2\pi nt}{T} + 2\pi nm \right)$$
$$= \sin \frac{2\pi nt}{T} \cos 2\pi nm + \cos \frac{2\pi nt}{T} \sin 2\pi nm$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\cdot 1+\left(\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\cdot 0 \\
&= \sin\frac{2\pi nt}{T}
\end{aligned}
$$

■

周期 T の周期関数 $f(t)$ と、周期 T の周期関数 $\cos\dfrac{2\pi nt}{T}$ について、これらの積 $f(t)\cos\dfrac{2\pi nt}{T}$ は、やはり周期 T の周期関数である（ただし、$1 \leqq n \in \mathbb{Z}$）。

$$\because\ {}^{\forall}m \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad f(t+mT)\cos\frac{2\pi n(t+mT)}{T} = f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}$$

■

周期 T の周期関数 $f(t)$ と、周期 T の周期関数 $\sin\dfrac{2\pi nt}{T}$ について、これらの積 $f(t)\sin\dfrac{2\pi nt}{T}$ は、やはり周期 T の周期関数である（ただし、$1 \leqq n \in \mathbb{Z}$）。

$$\because\ {}^{\forall}m \in \mathbb{Z} \text{ に対して} \quad f(t+mT)\sin\frac{2\pi n(t+mT)}{T} = f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}$$

■

一般に、周期 T の周期関数 $g(t)$ があるとき、任意定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_c^{c+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt \tag{4}$$

が成り立つ。

$\because$ 任意定数 $c \in \mathbb{R}$ は一般に、ある $m \in \mathbb{Z}$ があって、$mT \leqq c < (m+1)T \leqq c+T$ をみたすので

$c = mT + d$ （ただし $0 \leqq d < T$） と書ける。

よって、式 (4) の左辺 $= \displaystyle\int_c^{c+T} g(t)dt = \int_{mT+d}^{mT+d+T} g(t)dt$

ここで、$t = w + mT$ とおくと、$\left\{\begin{array}{ccccc} t & : & mT+d & \to & mT+d+T \\ w & : & d & \to & d+T \end{array}\right.$ であり、 $\dfrac{dt}{dw} = 1$ であるので

$$= \int_d^{d+T} g(w+mT)\cdot 1\, dw$$

ここで、$g(w)$ は周期 T の周期関数であるので、$g(w+mT) = g(w)$ をみたすから

$$= \int_d^{d+T} g(w)dw$$

ここで、$0 \leqq d < T$ であったので

$$= \int_d^T g(w)dw + \int_T^{d+T} g(w)dw$$

ここで、第 2 項について $w = v + T$ とおくと、$\left\{\begin{array}{ccccc} w & : & T & \to & d+T \\ v & : & 0 & \to & d \end{array}\right.$ であり、 $\dfrac{dw}{dv} = 1$ であるので

$$= \int_d^T g(w)dw + \int_0^d g(v+T)\cdot 1\, dv$$

ここで、$g(v)$ は周期 T の周期関数であるので、$g(v+T)=g(v)$ をみたすから

$$= \int_d^T g(w)dw + \int_0^d g(v)dv$$

そして、変数 w と v はそれぞれ形式的に t に置き換えることができるので、

$$= \int_d^T g(t)dt + \int_0^d g(t)dt = \int_0^d g(t)dt + \int_d^T g(t)dt = \int_0^T g(t)dt = \text{式 (4) の右辺}$$

■

さて今、式 (4) における周期 T の周期関数 $g(t)$ を、周期 T の周期関数 $f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}$、周期 T の周期関数 $f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}$ のそれぞれとみなし、式 (4) における任意定数 $c \in \mathbb{R}$ を、$c = -\frac{T}{2}$ とすると、式 (2) と式 (3) はそれぞれ

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \tag{5}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \tag{6}$$

と表すこともできる。

C.2 のこぎり波（Sawtooth Wave）とそのフーリエ級数

基本周期 T、振幅 E、奇関数形の のこぎり波 $f(t)$ は、${}^\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$f(t) := \frac{2E}{T}t - 2Ek \quad \text{ただし} \frac{(2k-1)T}{2} < t \leqq \frac{(2k+1)T}{2} \tag{7}$$

と定義できる（※厳密な奇関数ではない）。

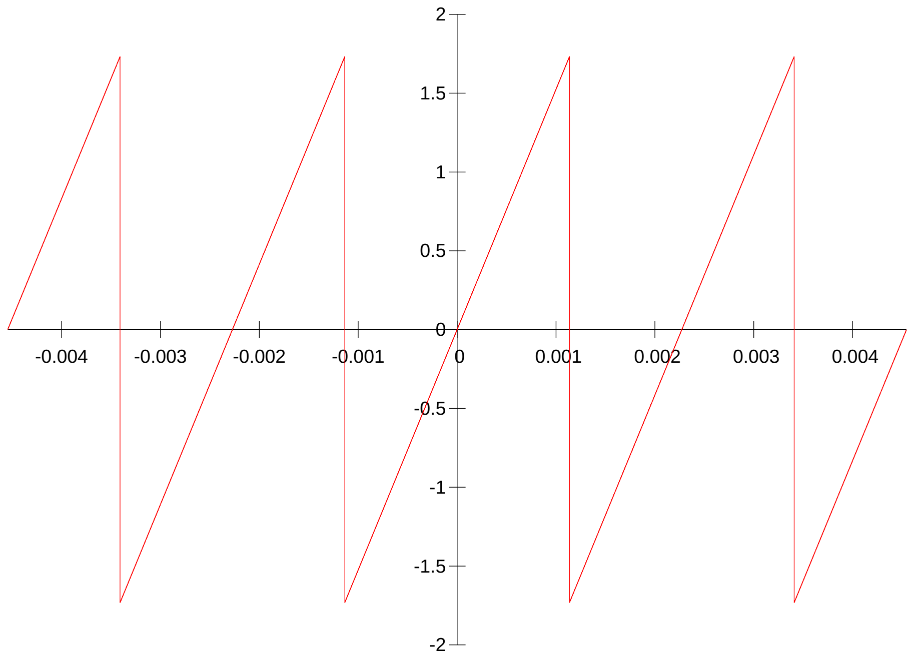

図 C.2.(i): $T = \frac{1}{440}$, $E = \sqrt{3}$, 奇関数形の のこぎり波 $f(t)$ のグラフ

この のこぎり波 $f(t)$ をフーリエ級数展開する。そのために、フーリエ係数を求める。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt && (8)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}\,t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \;+\; \int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(\frac{2E}{T}\,t-2E\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (9)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \;+\; \frac{2E}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \;-\; 2E\int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (10)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)'dt \;+\; \frac{2E}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)'dt \;-\; 2E\int_{\frac{T}{2}}^{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (11)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(\left[t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(\left[t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} - \int_{\frac{T}{2}}^{T}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right)\\
&\quad \left.- \;2E\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\} && (12)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(\left(\frac{T}{2}\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right)-\left(0\cdot\frac{T}{2\pi n}\sin 0\right)-\frac{T}{2\pi n}\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(\left(T\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n\right)-\left(\frac{T}{2}\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right)-\frac{T}{2\pi n}\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right)\\
&\quad \left.- \;2E\left(\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n-\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right)\right\} && (13)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left((0)-(0)-\frac{T}{2\pi n}\left(\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right)-\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right)\right)\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left((0)-(0)-\frac{T}{2\pi n}\left(\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n\right)-\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right)\right)\right)\\
&\quad \left.- \;2E(\;0-0\;)\right\} && (14)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(-\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}(-1)^n+\left(\frac{-T}{2\pi n}\right)\right)\right) + \frac{2E}{T}\left(-\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}+\frac{T}{2\pi n}(-1)^n\right)\right)\right\} && (15)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(\frac{T^2}{4(\pi n)^2}(-1)^n-\frac{T^2}{4(\pi n)^2}\right) + \frac{2E}{T}\left(\frac{T^2}{4(\pi n)^2}-\frac{T^2}{4(\pi n)^2}(-1)^n\right)\right\} && (16)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{ET}{2(\pi n)^2}(-1)^n-\frac{ET}{2(\pi n)^2} + \frac{ET}{2(\pi n)^2}-\frac{ET}{2(\pi n)^2}(-1)^n\right\} && (17)\\
&= 0 && (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt && (19)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}\,t\,\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \;+\; \int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(\frac{2E}{T}\,t-2E\right)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (20)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\,\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \;+\; \frac{2E}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\,\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \;-\; 2E\int_{\frac{T}{2}}^{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt + \frac{2E}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt - 2E\int_{\frac{T}{2}}^{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (22)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(\left[t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(\left[t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} - \int_{\frac{T}{2}}^{T}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right)\\
&\quad \left. - 2E\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\} && (23)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(\left(\frac{T}{2}\frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right) - \left(0\cdot\frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) + \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}}\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(\left(T\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n\right) - \left(\frac{T}{2}\frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right) + \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right)\\
&\quad \left. - 2E\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right)\right\} && (24)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n - (0) + \frac{T}{2\pi n}\left(\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin 0\right)\right)\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{2\pi n} + \frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n + \frac{T}{2\pi n}\left(\left(\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right)\right)\right)\\
&\quad \left. - 2E\left(\frac{-T}{2\pi n} + \frac{T}{2\pi n}(-1)^n\right)\right\} && (25)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n + \frac{T}{2\pi n}((0)-(0))\right)\right.\\
&\quad + \frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{2\pi n} + \frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n + \frac{T}{2\pi n}((0)-(0))\right)\\
&\quad \left. + \frac{ET}{\pi n} - \frac{ET}{\pi n}(-1)^n\right\} && (26)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n\right) + \frac{2E}{T}\left(-\frac{T^2}{2\pi n} + \frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n\right) + \frac{ET}{\pi n} - \frac{ET}{\pi n}(-1)^n\right\} && (27)\\
&= \frac{2}{T}\left\{-\frac{ET}{2\pi n}(-1)^n - \frac{ET}{\pi n} + \frac{ET}{2\pi n}(-1)^n + \frac{ET}{\pi n} - \frac{ET}{\pi n}(-1)^n\right\} && (28)\\
&= \frac{2}{T}\left\{-\frac{ET}{\pi n}(-1)^n\right\} && (29)\\
&= -\frac{2E}{\pi n}(-1)^n && (30)\\
&= \frac{2E}{\pi n}(-1)^{n+1} && (31)\\
& && (32)
\end{aligned}
$$

以上でフーリエ係数が求まったので、のこぎり波 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T} + \frac{2E}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) && (33)\\
&= \frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T} && (34)
\end{aligned}
$$

のこぎり波 $f(t)$ を第 3 フーリエ部分和で近似すると次のように書ける。

$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T} \tag{35}$$
$$= \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{2\pi\cdot 1t}{T} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi\cdot 2t}{T} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi\cdot 3t}{T}\right) \tag{36}$$

ここで、周期 $T = \dfrac{1}{440}$、$E = 1$ とすると、

$$f(t) \approx \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 1t - \frac{1}{2}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 2t + \frac{1}{3}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 3t\right) \tag{37}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\sin 880\pi t - \frac{1}{2}\sin 1760\pi t + \frac{1}{3}\sin 2640\pi t\right) \tag{38}$$

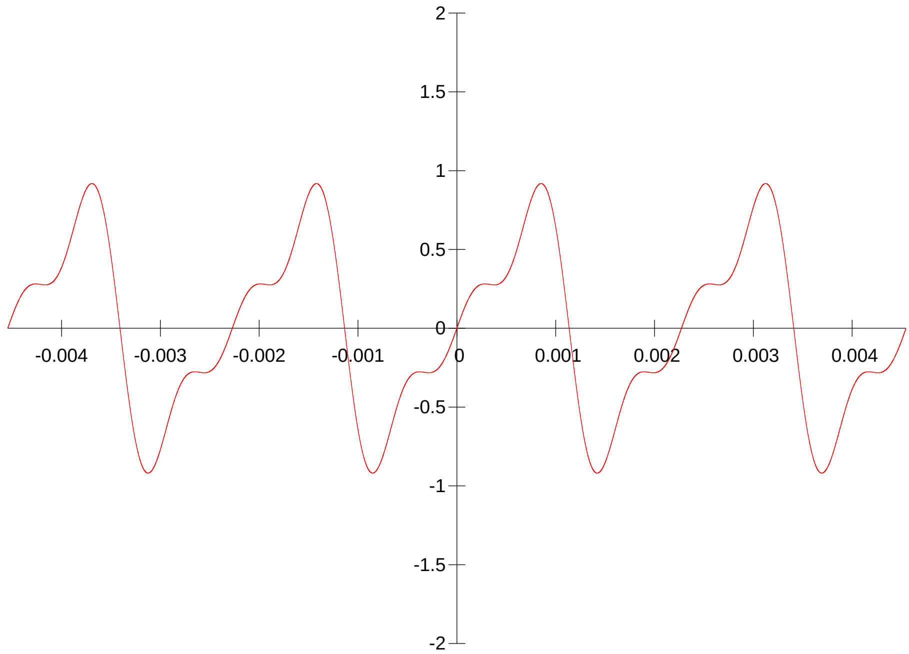

図 C.2.(ii): $T = \dfrac{1}{440}$, $E = 1$, 奇関数形の のこぎり波 $f(t)$ の第 3 フーリエ部分和のグラフ

C.3 矩形波 (くけいは)（Square Wave）とそのフーリエ級数

基本周期 T、振幅 E、奇関数形の矩形波 $f(t)$ は、$k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$f(t) := \begin{cases} -E & \text{ただし} \dfrac{(2k-1)T}{2} \leqq t < kT \\ E & \text{ただし}\ kT \leqq t \dfrac{(2k+1)T}{2} \end{cases} \tag{39}$$

と定義できる（※厳密な奇関数ではない）。

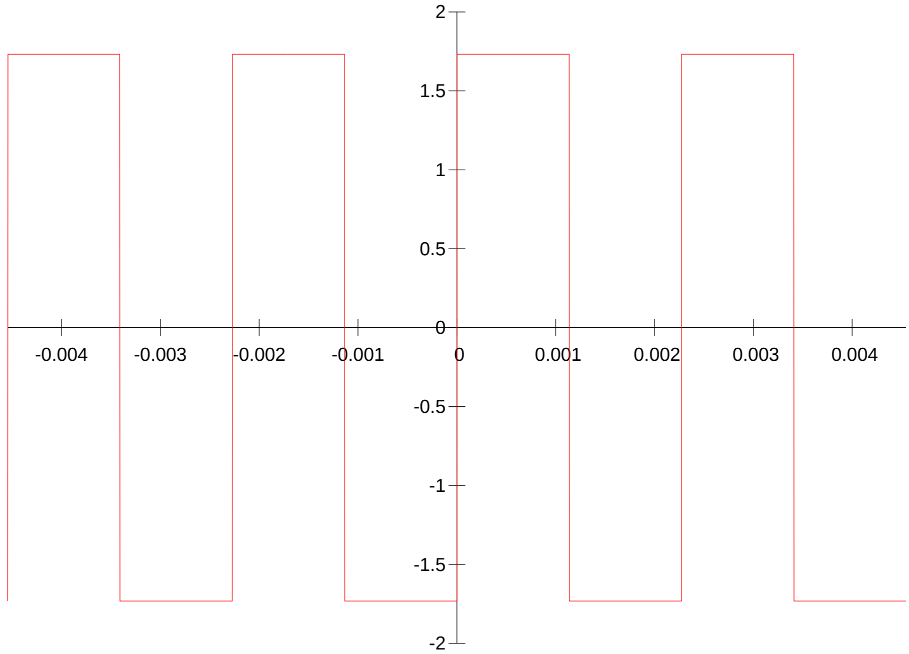

図 C.3.(i): $T = \dfrac{1}{440}$, $E = \sqrt{3}$, 奇関数形の矩形波 $f(t)$ のグラフ

この矩形波 $f(t)$ をフーリエ級数展開する。そのために、フーリエ係数を求める。

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt & (40)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}} E\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \ + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -E\cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} & (41)\\
&= \frac{2}{T}\left\{E\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt \ - \ E\int_{\frac{T}{2}}^{T} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} & (42)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\} & (43)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\pi n - \frac{T}{2\pi n}\sin 0\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n - \frac{T}{2\pi n}\sin\pi n\right)\right\} & (44)\\
&= \frac{2E}{T}\{\ (0-0)\ - \ (0-0)\ \} & (45)\\
&= 0 & (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt && (47)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{2}} E\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \ + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -E\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (48)\\
&= \frac{2}{T}\left\{E\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi nt}{T}dt \ - \ E\int_{\frac{T}{2}}^{T} \sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (49)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{2}} - \left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right\} && (50)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos\pi n\right)\right\} && (51)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{ \left(\frac{-T}{2\pi n}(-1)^n + \frac{T}{2\pi n}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n} + \frac{T}{2\pi n}(-1)^n\right) \right\} && (52)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{ \frac{-2T}{2\pi n}(-1)^n + \frac{2T}{2\pi n} \right\} && (53)\\
&= 2E\left\{ \frac{-1}{\pi n}(-1)^n + \frac{1}{\pi n} \right\} && (54)\\
&= \frac{2E}{\pi n}(\ 1-(-1)^n\ ) && (55)
\end{aligned}$$

以上でフーリエ係数が求まったので、矩形波 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ 0\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T} \ + \ \frac{2E}{\pi n}(\ 1-(-1)^n\ )\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) && (56)\\
&= \frac{2E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T} && (57)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&n: odd \quad \Rightarrow \quad (-1)^n = -1 \text{ より、} \frac{1-(-1)^n}{n} = \frac{2}{n} && (58)\\
&n: even \quad \Rightarrow \quad (-1)^n = 1 \text{ より、} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0 && (59)
\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{2E}{\pi}\sum_{1\leqq n:odd}\frac{2}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T} && (60)\\
&= \frac{4E}{\pi}\sum_{1\leqq n:odd}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi nt}{T} && (61)
\end{aligned}$$

また、$1 \leqq m \in \mathbb{Z}$ に対して、$n = 2m-1$ と置きかえると

$$f(t) \approx \frac{4E}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{2\pi(2m-1)t}{T} \qquad (62)$$

矩形波 $f(t)$ を第 3 フーリエ部分和で近似すると次のように書ける。

$$\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{4E}{\pi}\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{2m-1}\sin\frac{2\pi(2m-1)t}{T} && (63)\\
&= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{2\pi\cdot 1t}{T} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\pi\cdot 3t}{T} + \frac{1}{5}\sin\frac{2\pi\cdot 5t}{T}\right) && (64)
\end{aligned}$$

ここで、周期 $T = \dfrac{1}{440}$、$E = 1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 1t + \frac{1}{3}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 3t + \frac{1}{5}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 5t\right) && (65)\\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin 880\pi t + \frac{1}{3}\sin 2640\pi t + \frac{1}{5}\sin 4400\pi t\right) && (66)
\end{aligned}
$$

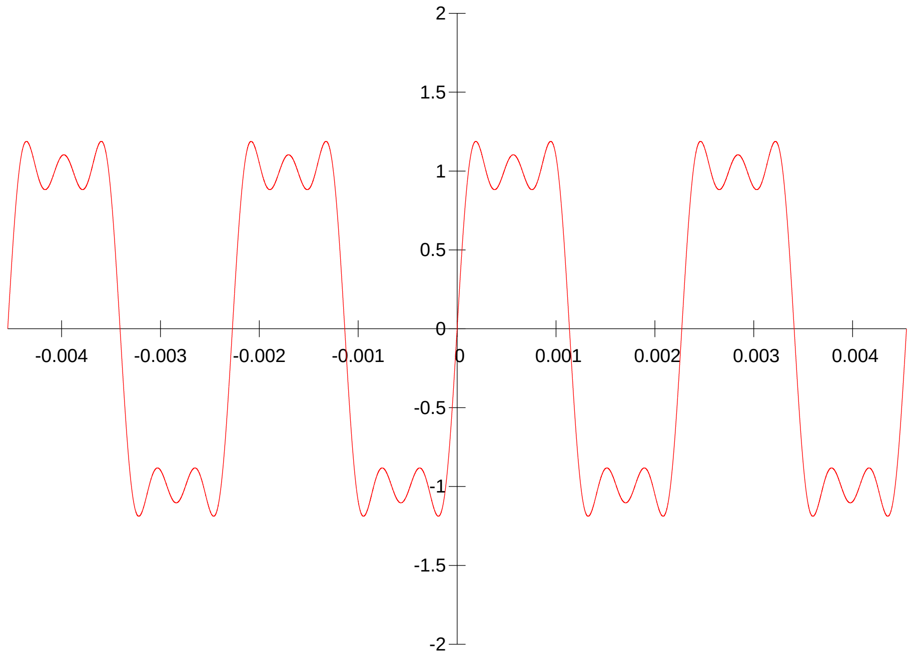

図 C.3.(ii): $T = \dfrac{1}{440}$, $E = 1$, 奇関数形の矩形波 $f(t)$ の第 3 フーリエ部分和のグラフ

C.4　三角波（Triangle Wave）とそのフーリエ級数

基本周期 T、振幅 E、奇関数形の三角波 $f(t)$ は、$k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{-4E}{T}t + 4Ek - 2E & \text{ただし} \dfrac{(2k-1)T}{2} \leqq t \leqq \dfrac{(4k-1)T}{4} \\ \dfrac{4E}{T}t - 4Ek & \text{ただし} \dfrac{(4k-1)T}{4} \leqq t \leqq \dfrac{(4k+1)T}{4} \\ \dfrac{-4E}{T}t + 4Ek + 2E & \text{ただし} \dfrac{(4k+1)T}{4} \leqq t \leqq \dfrac{(2k+1)T}{2} \end{cases} \tag{67}$$

と定義できる。

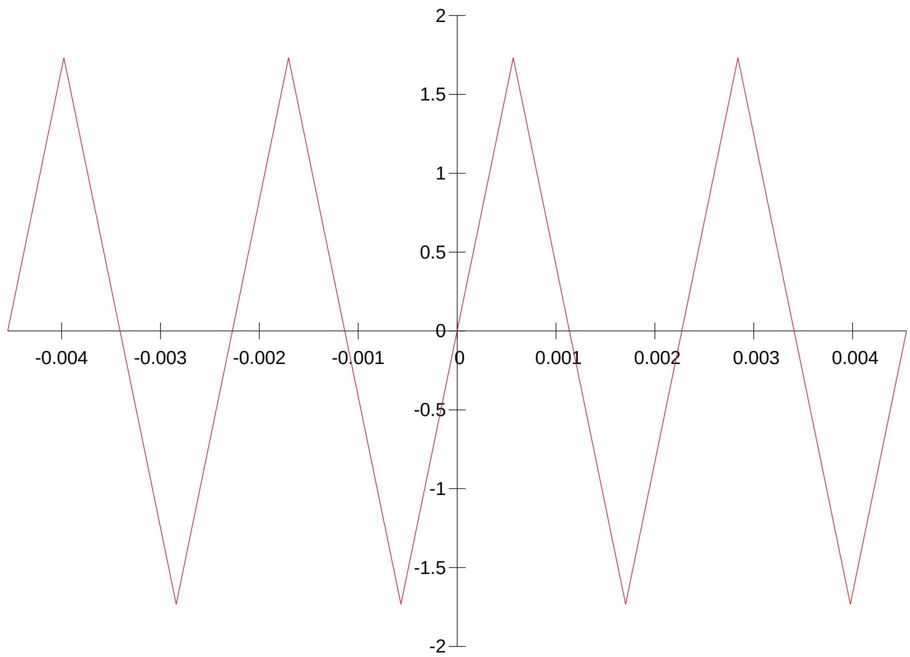

図 C.4.(i): $T = \dfrac{1}{440}$, $E = \sqrt{3}$, 奇関数形の三角波 $f(t)$ のグラフ

この三角波 $f(t)$ をフーリエ級数展開する。そのために、フーリエ係数を求める。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \tag{68}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4E}{T}\,t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right. \\ &\quad + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(\frac{-4E}{T}\,t + 2E\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(\frac{4E}{T}\,t - 4E\right)\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right\} \end{aligned} \tag{69}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{ \frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right. \\
& - \frac{4E}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \;+\; 2E\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt \\
& \left. + \; \frac{4E}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T} t\,\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \;-\; 4E\int_{\frac{3T}{4}}^{T} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right\}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{ \frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt \right. \\
& - \frac{4E}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt \;+\; 2E\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt \\
& \left. + \; \frac{4E}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T} t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt \;-\; 4E\int_{\frac{3T}{4}}^{T} \cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right\}
\end{aligned}
\tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{ \frac{4E}{T}\left(\quad \left[t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{\frac{T}{4}} - \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \quad \right) \right. \\
& - \frac{4E}{T}\left(\quad \left[t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \quad \right) \\
& \quad + \; 2E\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \\
& + \frac{4E}{T}\left(\quad \left[t\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{3T}{4}}^{T} - \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt \quad \right) \\
& \left. \quad - \; 4E\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{3T}{4}}^{T} \right\}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{ \frac{4E}{T}\left(\quad \left(\frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) - \left(0\cdot\frac{T}{2\pi n}\sin 0\right) - \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{4}} \quad \right) \right. \\
& - \frac{4E}{T}\left(\quad \left(\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \quad \right) \\
& \quad + \; 2E\left(\quad \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& + \frac{4E}{T}\left(\quad \left(T\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n\right) - \left(\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{3T}{4}}^{T} \quad \right) \\
& \left. \quad - \; 4E\left(\quad \left(\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{ \frac{4E}{T}\left(\quad \frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) \quad \right) \\
& - \frac{4E}{T}\left(\quad \left(\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& \quad + \; 2E\left(\quad \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{4E}{T}\Bigg(\quad -\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad - \ 4E\Bigg(\quad -\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \quad \Bigg)\Bigg\} \qquad (74) \\
&= \frac{2E}{T}\Bigg\{\frac{4}{T}\Bigg(\quad \frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) \quad \Bigg) \\
&\quad - \frac{4}{T}\Bigg(\quad \left(\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad + \ 2\Bigg(\quad \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad + \frac{4}{T}\Bigg(\quad -\frac{3T}{4}\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad - \ 4\Bigg(\quad -\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \quad \Bigg)\Bigg\} \qquad (75) \\
&= \frac{2E}{T}\Bigg\{\Bigg(\quad \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) \quad \Bigg) \\
&\quad - \Bigg(\quad \left(\frac{3T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad + \ 2\Bigg(\quad \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad + \Bigg(\quad -\frac{3T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \Bigg) \\
&\quad - \ 4\Bigg(\quad -\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} \quad \Bigg)\Bigg\} \qquad (76) \\
&= \frac{2E}{T}\Bigg\{\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) \\
&\quad - \frac{3T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} + \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad +\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \\
&\quad + \ \frac{2T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} - \frac{2T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{3T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}$$

$$-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n-\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right)$$

$$\left.+\ \frac{4T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right\} \tag{77}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2E}{T}\left\{-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right)\right. \\
&\quad +\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}-\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \\
&\quad \left.-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n-\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right)\right\} && (78)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\frac{T}{(\pi n)^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+\frac{-T}{(\pi n)^2}\left(\cos\frac{3\pi n}{2}-\cos\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{T}{(\pi n)^2}\left(1-\cos\frac{3\pi n}{2}\right)\right\} && (79)\\
&= \frac{2E}{(\pi n)^2}\left\{\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)-\left(\cos\frac{3\pi n}{2}-\cos\frac{\pi n}{2}\right)+\left(1-\cos\frac{3\pi n}{2}\right)\right\} && (80)\\
&= \frac{2E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-1-\cos\frac{3\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}+1-\cos\frac{3\pi n}{2}\right\} && (81)\\
&= \frac{2E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{3\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{3\pi n}{2}\right\} && (82)\\
&= \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{3\pi n}{2}\right\} = \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\left(\frac{-\pi n}{2}+2\pi n\right)\right\} && (83)\\
&= \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\left(\frac{-\pi n}{2}\right)\right\} = \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\cos\frac{\pi n}{2}-\cos\frac{\pi n}{2}\right\} && (84)\\
&= 0 && (85)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt && (86)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\int_0^{\frac{T}{4}}\frac{4E}{T}t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right.\\
&\quad +\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\left(\frac{-4E}{T}t+2E\right)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\\
&\quad \left.+\int_{\frac{3T}{4}}^{T}\left(\frac{4E}{T}t-4E\right)\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (87)\\
&= \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right.\\
&\quad -\frac{4E}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\ +2E\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\\
&\quad \left.+\frac{4E}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T}t\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\ -4E\int_{\frac{3T}{4}}^{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} && (88)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt\right. \\
& -\frac{4E}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt \ + 2E\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \sin\frac{2\pi nt}{T}dt \\
& \left. + \frac{4E}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{T} t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)' dt \ - 4E\int_{\frac{3T}{4}}^{T} \sin\frac{2\pi nt}{T}dt\right\} \qquad (89)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\left(\left[t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_0^{\frac{T}{4}} - \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right)\right. \\
& -\frac{4E}{T}\left(\left[t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right) \\
& \quad + 2E\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \\
& +\frac{4E}{T}\left(\left[t\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)\right]_{\frac{3T}{4}}^{T} - \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}dt \right) \\
& \quad \left. - 4E\left[\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right\} \qquad (90)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\left(\left(\frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) - \left(0\cdot\frac{-T}{2\pi n}\cos 0\right) + \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_0^{\frac{T}{4}} \right)\right. \\
& -\frac{4E}{T}\left(\left(\frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right) \\
& \quad + 2E\left(\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \right) \\
& +\frac{4E}{T}\left(\left(T\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n\right) - \left(\frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) + \frac{T}{2\pi n}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]_{\frac{3T}{4}}^{T} \right) \\
& \quad \left. - 4E\left(\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos 2\pi n\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) \right)\right\} \qquad (91)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\left(\frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\sin 0\right) \right) \\
& -\frac{4E}{T}\left(\left(\frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \right. \\
& \qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \right) \\
& \quad + 2E\left(\left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \right) \\
& +\frac{4E}{T}\left(T\frac{-T}{2\pi n} - \frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} \right. \\
& \qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin 2\pi n - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) \right) \\
& \quad \left. - 4E\left(\frac{-T}{2\pi n} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} \right)\right\} \qquad (92)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2E}{T}\left\{\frac{4}{T}\left(\quad \frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right.\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& -\frac{4}{T}\left(\quad \left(\frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& \quad + \ 2\left(\quad \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& +\frac{4}{T}\left(\quad T\frac{-T}{2\pi n} - \frac{3T}{4}\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{T}{2\pi n}\left(-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& \quad \left. - \ 4\left(\quad \frac{-T}{2\pi n} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} \quad \right)\right\}
\end{aligned}
\tag{93}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2E}{T}\left\{\left(\quad \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right.\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& -\left(\quad \left(\frac{-3T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& \quad + \ 2\left(\quad \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right) - \left(\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& +\left(\quad \frac{-4T}{2\pi n} - \frac{-3T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. +\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) \quad \right) \\
& \quad \left. - \ 4\left(\quad \frac{-T}{2\pi n} - \frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} \quad \right)\right\}
\end{aligned}
\tag{94}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2E}{T}\left\{\frac{-T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad +\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \\
& +\frac{3T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} \\
& \qquad\qquad\qquad -\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2} - \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right) \\
& \quad + \ \frac{-2T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} + \frac{2T}{2\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} \\
& +\frac{-4T}{2\pi n} + \frac{3T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2} \\
& \qquad\qquad\qquad +\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right) \\
& \quad \left. + \ \frac{4T}{2\pi n} - \frac{4T}{2\pi n}\cos\frac{3\pi n}{2}\right\}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2E}{T}\left\{\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{3\pi n}{2}\right)\right\} && (96)\\
&= \frac{2E}{T}\left\{\frac{T}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{T}{(\pi n)^2}\left(\sin\frac{3\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{T}{(\pi n)^2}\sin\frac{3\pi n}{2}\right\} && (97)\\
&= \frac{2E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}-\left(\sin\frac{3\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)-\sin\frac{3\pi n}{2}\right\} && (98)\\
&= \frac{2E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}+\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}\right\} && (99)\\
&= \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{3\pi n}{2}\right\} \;=\; \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\left(\frac{-\pi n}{2}+2\pi n\right)\right\} && (100)\\
&= \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}-\sin\left(\frac{-\pi n}{2}\right)\right\} \;=\; \frac{4E}{(\pi n)^2}\left\{\sin\frac{\pi n}{2}+\sin\frac{\pi n}{2}\right\} && (101)\\
&= \frac{8E}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2} && (102)\\
& && (103)
\end{aligned}
$$

以上でフーリエ係数が求まったので、三角波 $f(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}+\frac{8E}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n}{2}\,\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) && (104)\\
&= \frac{8E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\,\sin\frac{2\pi nt}{T} && (105)
\end{aligned}
$$

三角波 $f(t)$ を第 3 フーリエ部分和で近似すると次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{8E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\,\sin\frac{2\pi nt}{T} && (106)\\
&= \frac{8E}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2}\,\sin\frac{2\pi\cdot 1t}{T}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{2}\,\sin\frac{2\pi\cdot 2t}{T}+\frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{2}\,\sin\frac{2\pi\cdot 3t}{T}\right) && (107)\\
&= \frac{8E}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{2\pi\cdot 1t}{T}-\frac{1}{9}\sin\frac{2\pi\cdot 3t}{T}\right) && (108)
\end{aligned}
$$

ここで、周期 $T=\dfrac{1}{440}$、$E=1$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f(t) &\approx \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 1t-\frac{1}{9}\sin 440\cdot 2\pi\cdot 3t\right) && (109)\\
&= \frac{8}{\pi^2}\left(\sin 880\pi t-\frac{1}{9}\sin 2640\pi t\right) && (110)
\end{aligned}
$$

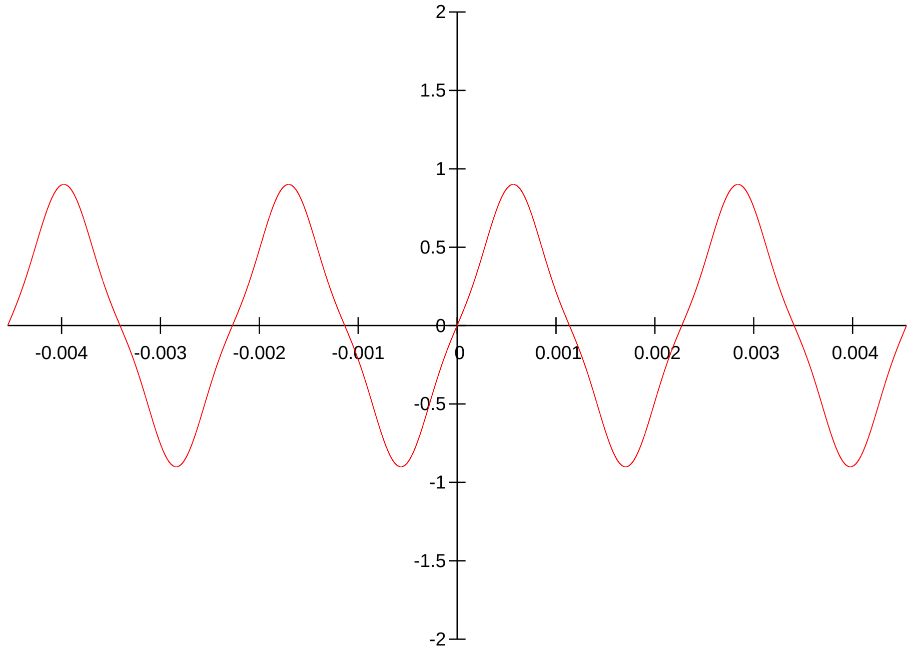

図 C.4.(ii): $T = \dfrac{1}{440},\ E = 1,$ 奇関数形の三角波 $f(t)$ の第 3 フーリエ部分和のグラフ